Структура матриць системи лінійних алгебраїчних рівнянь для задачі моделювання масопереносу в пористому середовищі на графі

Колесников Валерій

Факультет Комп'ютерних Наук та Кібернетики
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

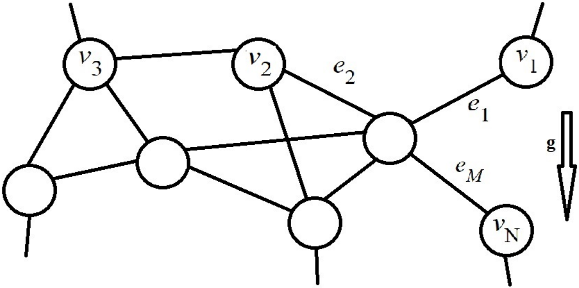
ICISSE
2023

Рівняння Річардса-Клюта

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) + \frac{\partial K}{\partial z} + s$$

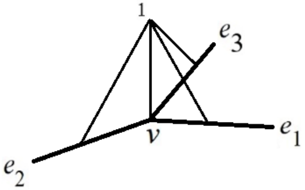
t — час [s],
$\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ — коефіцієнт насиченості [–],
h — потенціал тиску [m],
$K(h)$ — гідравлічна кондуктивність [m/s],
s — джерела (стоки) [s^{-1}],
z — вертикальна координата.
$(x, y, z, t) \in \Omega \times [0, T]$.
$K(h), \theta(h)$ відомі та представляють властивості середовища.

Рівняння Річардса-Клюта на графі



$$C_e \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(K_e \left(\frac{\partial h}{\partial x} + g_z \right) \right), x \in [0, L_e],$$

$$\sum_{e \in Inc(v)} q_e(v) = 0.$$



$$\int_G (C_v\phi_v + \sum_{e\in Inc(v)} C_{e,1}\phi_{e,1})\times$$

$$\times\partial^{-t}(h_v\phi_v + \sum_{e\in Inc(v)} h_{e,1}\phi_{e,1})\phi_v =$$

$$= -\int_G (K_v\phi_v + \sum_{e\in Inc(v)} K_{e,1}\phi_{e,1})\times$$

$$\times(h_v\phi'_v + \sum_{e\in Inc(v)} h_{e,1}\phi'_{e,1} + (i_z, e))\cdot\phi'_v.$$

Структура матриці СЛАР та її властивості

$$A = \begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_i & 0 \\ c_i & a_i & b_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_i & a_i & b_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_i & a_i & b_i & 0 & d_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_i & a_i & b_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_i & a_i & b_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_i & 0 & c_i & a_i & b_i & 0 \\ d_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_i & a_i & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_i & a_i \end{pmatrix}$$

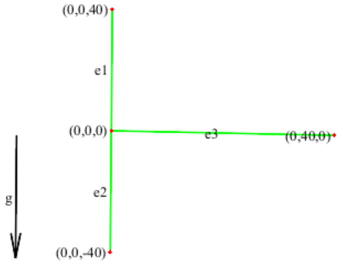
- A — розріджена,
- A — симетрична,
- A має діагональну перевагу.

Методи розвязування СЛАР

- Наближені (Зейдель, спряжених градієнтів для розріджених матриць)
- Точні (Метод Гауса для розріджених матриць).

$$A' = \begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_i & 0 \\ 0 & a_i & b_i & 0 & 0 & 0 & 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & a_i & b_i & 0 & 0 & 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_i & b_i & 0 & d_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_i & b_i & d_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_i & b_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_i & b_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_i & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_i \end{pmatrix}$$

Приклад



$$\sum_{i=1}^{3} q_{e_i}(0,0,0) = 0.$$

Порівняльний аналіз

N	50	100	200	500	1000
T_{Gauss}/T_{Seidel}	0.7156	0.7848	0.8800	1.0214	0.9173
σ_{Gauss}	0.0119	0.0145	0.0274	0.0348	0.0352
σ_{Seidel}	0.0221	0.0318	0.0377	0.0455	0.0413

Висновки і напрямки подальших досліджень

Висновки:

- Метод Гауса дає перевагу для кількості вузлів просторової сітки, що є розповсюдженими при процесі апроксимації розвязку
- Очікуваний час роботи методу Гауса лугко оцінити, а реальний час його роботи має менше середньоквадратичне відхилення, ніж ітеративний метод Зейделя,
- При цьому метод Гауса дає точний розвязок СЛАР.

Подальші дослідження:

- Отримання формул для розвязку СЛАР з подібними матрицями на основі модифікованого методу прогонки з роботи Абрамова А.А. 1963 р.

Дякую за увагу